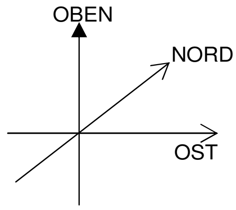
Matura 2010

Reifeprüfung aus Mathematik, Klasse: 8a (Prof. Mag. Martin Knapp)

1 *Ganz schön knapp!*



Die x-y-Ebene eines kartesischen Koordinatensystems beschreibt eine flache Landschaft, in der sich ein Flughafen befindet. Entgegen der üblichen Schreibweise, angepasst an die Navigation auf der Erde, zeigt die x-Achse in Richtung Norden und die y-Achse in Richtung Osten.

Mit dem Abheben eines Flugzeuges zum Zeitpunkt t = 0 beginnt die Startflugphase, die durch die Gerade

$$g: X = \begin{pmatrix} -200 \\ -400 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 30 \\ 48 \\ 36 \end{pmatrix}$$ (t in Sekunden, Koordinatenangaben in m)

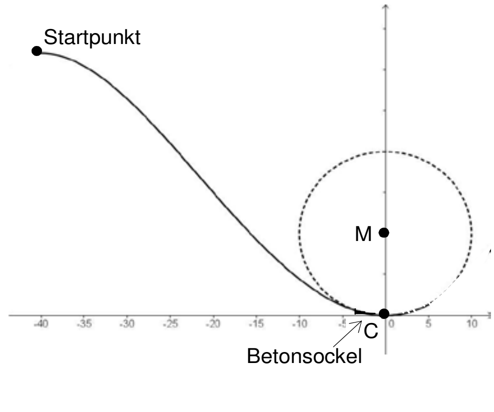
unter der vereinfachten Annahme einer konstanten Geschwindigkeit beschrieben werden soll.

a) Bestimmen Sie die Größe des Steigungswinkels, den das Flugzeug in der Startflugphase gegenüber der Rollbahn hat!
Berechnen Sie die kürzeste Entfernung, die das Flugzeug in der Startflugphase zum Flughafentower hat! Der Kontrollraum des Towers befindet sich im Punkt T(0|100|30).

b) In direkter Nähe des Flughafens hat sich eine Regenfront aufgebaut. Die Front liegt in der Ebene $\varepsilon: 4x + 3y = 12000$.
Ermitteln Sie den Zeitpunkt t_1, zu dem das Flugzeug in die Regenfront eintaucht und geben Sie die dazugehörige Flughöhe an! Fertigen Sie eine Schrägrissskizze der Situation an!

c) Ein vorüber fliegendes Flugzeug, das sich zum Zeitpunkt t = 0 im Radar in der Position P(3000|–8000|6000) befindet, fliegt (auch vor dem Zeitpunkt t = 0) in konstanter Höhe mit einer Geschwindigkeit von 150 m/sec geradlinig ostwärts.
Bestimmen Sie den Zeitpunkt t_2, in dem sich das startende und das vorüber fliegende Flugzeug am nächsten kommen! Muss die Entfernung beider Flugzeuge zu dem kritischen Zeitpunkt t_2 mit dem Abstand der Flugbahnen übereinstimmen? Argumentieren Sie!

2 *Ganz schön riskant!*



In einem Vergnügungspark soll eine Achterbahn errichtet werden. Die Konstrukteure möchten einen Looping in der Form eines Kreises einbauen.
In der Seitenansicht (siehe Figur rechts) sieht der Looping wie ein Kreis aus und es liegen Anfangs- und Endpunkt des Loopings genau hintereinander. Die Werte entsprechen Längen in Metern.

Die Planung sieht bislang folgendermaßen aus: Der Wagen startet bei x = –40. Die Abfahrt wird im Intervall [–40; 0] durch die Funktion g beschrieben. Die Funktionsgleichung lautet

$$g(x) = -\frac{1}{160000}x^4 + \frac{1}{2000}x^3 + \frac{1}{20}x^2.$$

a) Berechnen Sie die Höhe des Startpunktes!
Bestimmen Sie den Bereich der Abfahrt, in dem der Neigungswinkel von 45° überschritten wird! Verwenden Sie dazu den Solver des Taschenrechners!

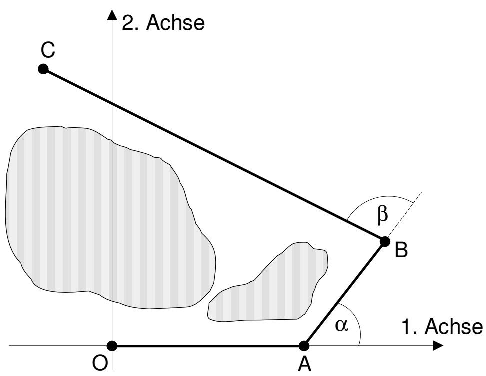
b) Wo ist die Stelle im Intervall [-40;0], an der die Beschleunigung des Wagens am größten ist? Begründen Sie Ihren Ansatz!

c) Im Punkt C geht die Abfahrt in den Looping-Kreis $k[M(0|10);\ 10]$ über. Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Übergang in C „glatt" (ohne Knick) verläuft! Wie nennt man die Eigenschaft, welche die Funktionen f und k an der betreffenden Stelle besitzen müssen, damit diese Bedingung erfüllt ist?

d) Aus Stabilitätsgründen soll die Achterbahn im Intervall [-3; 0] auf einem Betonsockel geführt werden, der die ganze Konstruktion fixiert. Der Sockel ist 1 m breit und fällt zu den Seiten senkrecht ab (siehe Abbildung). Ermitteln Sie das Volumen des Sockels!

3 *Ganz schön komplex!*

Um einen Punkt C zu vermessen, der vom Ursprung O eines Orstkoordinatensystems wegen dazwischen liegender Baumgruppen nicht direkt anvisiert werden kann, vermisst man einen um die Baumgruppen führenden Streckenzug OABC. Man misst die in der nebenstehenden Abbildung eingezeichneten Winkel $\alpha = 53{,}37°$, $\beta = 100{,}63°$ und die Entfernungen $\overline{OA} = 732$ m, $\overline{AB} = 497$ m und $\overline{BC} = 1451$ m.



a) Berechnen Sie die kartesischen Koordinaten von C im zugrunde gelegten Koordinatensystem!

b) Interpretieren Sie nun obige vier Punkte als komplexe Zahlen in der Gauß`schen Zahlenebene! Geben Sie jede der vier Zahlen sowohl in Polarkoordinaten als auch in Binomialform an! (Runden Sie auf ganze Zahlen!)

c) Wie lautet eine algebraische Gleichung niedrigstmöglichen Grades, deren Lösungsmenge die vier Zahlen enthält und die nach Umformung ausschließlich reelle Koeffizienten besitzt? (Die Umformung muss nicht durchgeführt werden!)
Wie könnte der Graph der zugehörigen Polynomfunktion aussehen? Skizzieren und begründen Sie!

4 *Ganz schön gesund!*

a) Anlässlich einer Studie wurden 2000 Jugendliche im Alter von 18 Jahren zu ihren Ernährungsgewohnheiten befragt. Von den Befragten gaben 740 an, am Morgen nicht zu frühstücken. Von diesen 740 „Nichtfrühstückern" waren 420 berufstätig. Unter den 1260 „Frühstückern" waren 800 nicht berufstätig. Aus den Befragten wird eine Person zufällig ausgewählt.
Untersuchen Sie, ob die Ereignisse F: „Die Person frühstückt am Morgen" und B: „Die Person ist berufstätig" stochastisch abhängig sind.

b) Das Unternehmen „Müsli-4-U" bietet individuell zusammenstellbare Müslipackungen an. Für die Zusammenstellung kann aus 2 Basismischungen sowie aus 9 Frucht-, 4 Nuss- und 3 Getreidezusätzen gewählt werden.
Wie viele verschiedene Müslipackungen können zusammengestellt werden, wenn jede genau eine Basismischung und genau 4 verschiedene Zusätze enthalten soll?

c) Im Rahmen einer Aktion „Gesundes Frühstück“ konnte „Müsli-4-U“ an unserem Gymnasium als Kooperationspartner gewonnen werden. Der Kooperationspartner liefert jeder Klasse täglich eine Gratis-Packung Müsli, das aus genau einer Basismischung und genau 2 Zusätzen zusammengestellt wird. Die beiden Zusätze stammen dabei jeweils aus zwei verschiedenen der Bereiche „Früchte“, „Nüsse“ beziehungsweise „Getreide“. Bestätigen Sie durch Rechnung, dass es 150 verschiedene Möglichkeiten gibt, eine solche Gratis-Packung zusammenzustellen!

d) Im Folgenden wird angenommen, dass jede dieser 150 Möglichkeiten gleich wahrscheinlich ist und die Lieferung der einzelnen Packungen unabhängig voneinander erfolgt.

(1) Es gibt Schüler, die aufgrund einer Allergie keine Nüsse essen dürfen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Gratis-Packung keinen Nusszusatz enthält!

(2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in der Klasse 8a an mindestens 4 von 5 Tagen einer Schulwoche die gelieferte Gratis-Packung keinen Nusszusatz enthält!

Lösungen:

1) a) 32,46°; 276,12 m
   b) $t_1 = 53{,}03$ sec; 1909,09 m
   c) $t_2 = 86{,}3$ sec
2) a) 32 m; [-29,55; -13,18]
   b) -21,63
   c) Nachweis der Differenzierbarkeit
   d) ca. 0,44 m³
3) a) C(-275,62|1034,92)
   b) $z_O = (0|0°) = 0$; $z_A = (732|0°) = 732$; $z_B = (1103|21°) = 1029 + 399i$; $z_C = (1071|105°) = -276 + 1035i$
   c) $x\cdot(x - 732)\cdot(x - (1029 + 399i))\cdot(x - (1029 - 399i))\cdot(x - (-276 + 1035i))\cdot(x - (-276 - 1035i)) = 0$
4) a) F und B sind stochastisch abhängig
   b) 3640
   c) 150
   d) (1) 0,36
      (2) 0,06

Reifeprüfung aus Mathematik, Klasse: 8b (Prof. OStR Mag. Friedrich Pöll)

1 *Schule von oben*

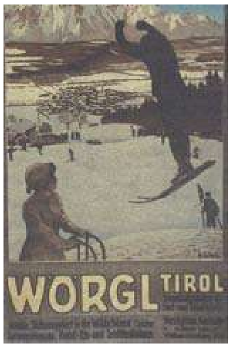
a) 6P

Der Maturant Trigo Winkler sitzt zur Maturavorbereitung im Gastgarten des Gasthauses "Hennersberger Hof" auf einer Seehöhe von 860m und spielt mit einem Theodoliten. Seine geliebte Schule sieht er unter einem Tiefenwinkel von 21°30', nach Schwenken des Geräts um einen Winkel von 95°10' sieht er die Kapelle auf dem Grattenbergl (Seehöhe 582m) unter einem Tiefenwinkel von 6°25'.

Wie weit ist die Schule vom Fußpunkt des Grattenbergls (Startpunkt des Klettergartens, lotrecht unter der Kapelle) entfernt, wenn beide Punkte auf einer Seehöhe von 511m liegen? Fertigen Sie dazu eine anschauliche Skizze an!

Lösung: 2640m

b) 3P



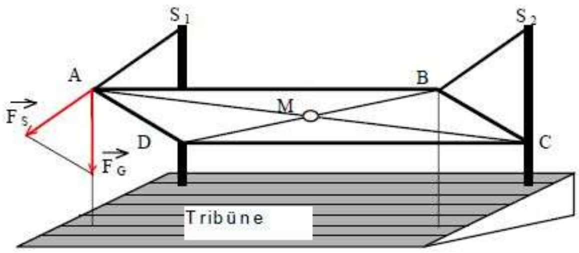
Der Maturant erinnert sich, dass ihm sein Sportlehrer einmal die Talstation des ehemaligen Sesselliftes gezeigt hat. Er erkennt diese in der Falllinie und misst einen Tiefenwinkel von 26°. Aus dem Turnunterricht weiß er noch, dass ihn bei den gefürchteten Laufrunden die 10 Höhenmeter von der Schule bis zur Talstation oft sehr geärgert haben. Jetzt berechnet er aus den ihm vorliegenden Daten die durchschnittliche Neigung des Hanges (bis zur Talstation) in Prozent und träumt von einer Tiefschneeabfahrt an einem Montag früh anstatt einer Mathematikstunde.

Wie viel % beträgt die Hangneigung und wie lange würde die Fahrt in der Falllinie mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 6m/s dauern?

Lösung: 773m
2min10s ; 49%

2 *Hoffentlich hält das Dach!*

Vom abgebildeten Dach über einer Tribüne kennt man die Koordinaten der Punkte A(6/-12/22), B(38/4/22), M(19/2/19) S_1(0/0/26) und S_2(32/16/26) (Maße in m).



a) 4P

Ermitteln Sie die Gleichung der durch A,B,M bestimmten Ebene ε und berechnen Sie deren Schnittwinkel mit der Koordinatenebene π_1!

In welchem Zusammenhang könnte dieser Winkel interessant sein?

Lösung: 24,1
ε:-x+2y+5z=80

b) 2P

Die Punkte A und B sind die Eckpunkte, M der Mittelpunkt eines Parallelogramms. Bestimmen Sie die Koordinaten der fehlenden Punkte!

LösungC(32/16/16)

c) 3P

Im Punkt M soll eine Überwachungskamera installiert werden. Aus technischen Gründen ist ein Mindestabstand zur Tribüne von 9m vorgeschrieben. Überprüfen Sie, ob diese Bedingung erfüllt wird, wenn die Tribünenebene durch die Gleichung ε_1:2x-4y+5z-65=0 festgelegt ist! Präzisieren Sie in diesem Zusammenhang den Begriff "Abstand"! Warum könnte ein Mindestabstand für die Kamera wichtig sein?

Lösung: 8,94m

d) 3P

Von den 2 Mastspitzen führen Befestigungsseile zu den Punkten A und B. Im Punkt A wirkt eine Gewichtskraft $\vec{F_g}$ mit $|\vec{F_g}|$=1000N senkrecht zur Horizontalebene. Diese Kraft kann in eine Komponente $\vec{F_s}$ in Seilrichtung und in eine Komponente in Richtung des Punktes D zerlegt werden. Ermitteln Sie den Betrag der Kraft $\vec{F_s}$!

Wer benötigt diesen Wert?

Lösung: 1400N

3 *Archimedes war ein weiser Mann, was ich auch beweisen kann!*

a) 3P

Der Graph einer Polynomfunktion 2. Grades f (Parabel) enthält die Punkte $A(4/y_a)$ und B(-1/4,5).
Im Punkt A schneidet die Gerade g: y = -0,5x + 4 den Graphen rechtwinkelig.
Ermitteln Sie die Funktionsgleichung von f!

Lösung: $0,5x^2-2x+2$

b) 3P

Bestimmen Sie den Flächeninhalt des von der Geraden g(x) = -0,5x + 4 und der Parabel p(x)= 0,5x ² - 2x + 2 eingeschlossenen Segments. (Skizze!)

Lösung: 10,42FE

c) 3P

Archimedes von Syracus formulierte folgenden Satz:
Es sei AB eine Sehne der Parabel und H der Halbierungspunkt dieser Sehne. Zieht man von H eine Parallele zur Parabelachse bis zum Schnittpunkt C mit der Parabel, so ist der Flächeninhalt des Parabelsegments genau 4/3 vom Flächeninhalt des Dreiecks ABC.
Zeigen Sie die Gültigkeit dieses Satzes für das vorliegende Beispiel!

d) 3P

Weisen Sie nach, dass die Tangente im Punkt D(1,5/0,125) parallel zur Geraden g ist! Was bedeutet das für das Dreieck ABD?

Lösung: Es entsteht das flächengrößte Dreieck

4 *Fit (fat?) with "ham and egg?*

a) 3P

Im Hotel "happy fitness" befinden sich erfahrungsgemäß 20% Briten. Von den Briten weiß man, dass jeder Achte zum Frühstück "ham and eggs" bestellt, während nur jeder Achtzigste Nichtbrite dies tut.
Sie treffen beim Frühstück an einem zufällig gewählten Tisch einen Hotelgast, der "ham and eggs" wählt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist er ein Brite?
Zeichnen Sie dazu einen Ereignisbaum!

Lösung: 71.4%

b) 2P

Wenn in diesem Hotel von 60 Gästen 12 Briten sind, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass Sie bei zufälliger Auswahl Ihrer drei Tischnachbarn mindestens zwei Briten am Tisch haben?
Argumentieren Sie, welches "Urnenmodell" Sie dabei verwenden!

Lösung: 9,9%

c) 2P

In diesem Hotel sprechen 30% der Gäste perfekt Englisch, 15% akzentfrei Spanisch und 5% beherrschen beide Sprachen perfekt.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Ihr Sitznachbar

(1) mindestens eine der beiden Sprachen ausgezeichnet kann? *Lösung: 40%*
(2) Spanisch perfekt beherrscht, aber nicht Englisch? *Lösung: 10%*

5 *Strahlenschutz kann Leben retten!*

a) 4P

Die Intensität I eines Laserstrahles nimmt mit der Eindringtiefe x in ein Gewebe exponentiell ab.

(1) Erstellen Sie eine Formel und erklären Sie alle verwendeten Zeichen!
(2) Ein 6mm dicker Schutzschild absorbiert 90% der Intensität. Wie dick muss ein Schild aus dem gleichen Material sein, damit nur 1% der Laserstrahlung durchkommt?

Lösung: 12mm

b) 4P

Nennen Sie weitere Beispiele von exponentiell abnehmenden Größen und erklären Sie in diesem Zusammenhang den Begriff "Halbwertszeit"!
Leiten Sie anhand einer von Ihnen gewählten Ausgangsformel eine Formel für die Berechnung der Halbwertszeit ab!

Lösung: $t_h=ln2/\lambda$